COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.° 7.

1821.

qu'on vient de rapporter. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que les valeurs de $\phi(x)$ fournies par les équations (8) et (9) résolvent la question proposée, quelles que soient les valeurs attribuées à la quantité a et au nombre A. Ce nombre et cette quantité sont donc deux constantes arbitraires, dont l'une ne peut admettre que des valeurs positives.

D'après ce qu'on vient de dire, les deux fonctions

$$\cos. ax, \quad \tfrac{1}{2}(A^x + A^{-x}),$$

ont la propriété commune de satisfaire à l'équation (1), ce qui établit entre elles une analogie remarquable. L'une et l'autre de ces deux fonctions se réduisent encore à l'unité pour $x = 0$. Mais une différence essentielle entre la première et la seconde, c'est que la valeur numérique de la première est constamment au-dessous de la limite 1, lorsqu'elle n'atteint pas cette limite; tandis que, dans la même hypothèse, la valeur numérique de la seconde est constamment au-dessus.

CHAPITRE VI.

Des Séries convergentes et divergentes. Règles sur la convergence des Séries. Sommation de quelques Séries convergentes.

§. 1.$^{\text{er}}$ *Considérations générales sur les Séries.*

On appelle *série* une suite indéfinie de quantités

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \&c. \ldots$$

qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différens *termes* de la série que l'on considère. Soit

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$$

la somme des n premiers termes, n désignant un nombre entier quelconque. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite *convergente*, et la limite en question s'appellera la *somme* de la série. Au contraire, si, tandis que n croît indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera *divergente*, et n'aura plus de somme. Dans l'un et l'autre cas, le terme qui correspond à l'indice n, savoir u_n, sera ce qu'on nomme le *terme général*. Il suffit que l'on donne ce terme général en fonction de l'indice n, pour que la série soit complétement déterminée.

L'une des séries les plus simples est la progression géométrique

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \&c. \ldots$$

qui a pour terme général x^n, c'est-à-dire, la puissance $n.^{me}$ de la quantité x. Si dans cette série on fait la somme des n premiers termes, on trouvera

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x};$$

et, comme pour des valeurs croissantes de n la valeur numérique de la fraction $\frac{x^n}{1-x}$ converge vers la limite zéro, ou croît au-delà de toute limite, suivant qu'on suppose la valeur numérique de x inférieure ou supérieure à l'unité, on doit conclure que dans la première hypothèse la progression

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad \&c. \ldots$$

est une série convergente qui a pour somme $\frac{1}{1-x}$, tandis que dans la seconde hypothèse la même progression est une série divergente qui n'a plus de somme.

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1) \qquad u_0, \quad u_1, \quad u_2 \ldots u_n, \quad u_{n+1}, \quad \&c. \ldots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \&c. \ldots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s : en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n, les sommes

$$s_n, \quad s_{n+1}, \quad s_{n+2}, \quad \&c. \ldots.$$

diffèrent de la limite s, et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme s_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$s_{n+1} - s_n = u_n,$$
$$s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},$$
$$s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\&c. \ldots.$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente ; mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n, les différentes sommes

$$u_n + u_{n+1},$$
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2},$$
$$\&c. \ldots.$$

c'est-à-dire, les sommes des quantités

$$u_n, \quad u_{n+1}, \quad u_{n+2}, \quad \&c. \ldots$$

prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

cf Moigno p 66

Prenons pour exemple la progression géométrique

$$(2) \qquad 1, \ x, \ x^2, \ x^3, \ \&c\ldots$$

Si la valeur numérique de x est supérieure à l'unité, celle du terme général x^n croîtra indéfiniment avec n, et cette seule remarque suffira pour constater la divergence de la série. La série sera encore divergente, si l'on suppose $x = \pm 1$, parce qu'alors la valeur numérique du terme général x^n, se réduisant à l'unité, ne décroîtra pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n. Mais, si la valeur numérique de x est supérieure à l'unité, les sommes des termes de la série pris à partir de x^n en tel nombre que l'on voudra, savoir,

$$x^n,$$

$$x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1 - x^2}{1 - x},$$

$$x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1 - x^3}{1 - x},$$

&c....

se trouvant toutes comprises entre les limites

$$x^n, \quad \frac{x^n}{1 - x},$$

chacune d'elles deviendra infiniment petite pour des

valeurs de n infiniment grandes; et par suite la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Prenons pour second exemple la série numérique

$$(3) \qquad 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4} \ \ldots \ \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n+1}, \ \&c\ldots$$

Le terme général de cette série, savoir, $\frac{1}{n+1}$ décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et cependant la série n'est pas convergente; car la somme faite du terme $\frac{1}{n+1}$ et de ceux qui le suivent jusqu'au terme $\frac{1}{2n}$ inclusivement, savoir,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

reste constamment supérieure, quel que soit n, au produit

$$n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2};$$

et par suite, cette somme ne décroît pas indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, ainsi que cela aurait lieu si la série était convergente. Ajoutons que, si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes de la série (3), et par 2^m la plus haute puissance de 2 renfermée dans $n+1$, on trouvera

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right),$$

et *à fortiori*

$$s_n > 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{2} = 1 + \frac{m}{2}.$$

On en conclura que la somme s_n croît indéfiniment avec le nombre entier m, et par conséquent avec n, ce qui est une nouvelle preuve de la divergence de la série.

Considérons encore la série numérique,

$$(4) \qquad 1,\ \frac{1}{1},\ \frac{1}{1.2},\ \frac{1}{1.2.3},\ \ldots\ \frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \&c\ldots$$

Les termes de cette série qui occupent un rang supérieur à n, savoir,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)},\ \&c\ldots,$$

seront respectivement inférieurs aux termes correspondans de la progression géométrique

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n},\ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^2},\ \&c\ldots.$$

Par suite, la somme des premiers termes pris en tel nombre que l'on voudra sera toujours inférieure à la somme des termes correspondans de la progression géométrique, qui est une série convergente, et à plus forte raison, à la somme de cette progression, c'est-à-dire, à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\cdot\frac{1}{n-1}.$$

Comme cette dernière somme décroît indéfiniment à mesure que n augmente, il en résulte que la série (4) est elle-même convergente. On est convenu

de désigner par la lettre e la somme de cette série. En ajoutant les n premiers termes, on obtiendra pour valeur approchée du nombre e

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

et, d'après ce qu'on vient de dire, l'erreur commise sera inférieure au produit du $n.^{me}$ terme par $\frac{1}{n-1}$. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $n = 11$, on trouvera pour la valeur approchée de e

$$(5) \qquad e = 2.7182818\ldots;$$

et l'erreur commise dans cette hypothèse sera inférieure au produit de la fraction $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}$ par $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire, à $\frac{1}{36288000}$, en sorte qu'elle n'altérera pas la 7.^{e} décimale.

Le nombre e, déterminé comme on vient de le dire, sera souvent employé dans la sommation des suites et dans le calcul infinitésimal. Les logarithmes pris dans le système qui a ce nombre pour base s'appellent *Népériens*, du nom de *Néper*, inventeur des logarithmes, ou *hyperboliques*, parce qu'ils servent à mesurer les diverses parties de l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes.

On indique généralement la somme d'une série convergente par la somme de ses premiers termes suivie d'un *&c*.... Ainsi, lorsque la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots.$$

est convergente, la somme de cette série est représentée par

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \&c.\ldots.$$

En vertu de cette convention, la valeur du nombre e se trouvera déterminée par l'équation

$$(6)\qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c.\ldots;$$

et, si l'on considère la progression géométrique

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \&c.\ldots,$$

on aura, pour des valeurs numériques de x inférieures à l'unité,

$$(7)\qquad 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

La série

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \&c.\ldots$$

étant supposée convergente, si l'on désigne sa somme par s, et par s_n la somme de ses n premiers termes, on trouvera

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \&c.\ldots$$
$$= s_n + u_n + u_{n+1} + \&c.\ldots,$$

et par suite

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + \&c.\ldots$$

De cette dernière équation il résulte que les quantités

$$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ \&c.\ldots.$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n, on aura

$$s = s_n + r_n;$$

et r_n sera ce qu'on appelle le *reste* de la série (1) à partir du n.^{me} terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x, cette série est convergente, et ses différens termes fonctions continues de x, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable;

$$s_n,\ r_n\ \text{et}\ s$$

sont encore trois fonctions de la variable x, dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissemens que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n, une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n, si l'on attribue à n une valeur très-considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante.

1.er THÉORÈME. *Lorsque les différens termes de la série* (1) *sont des fonctions d'une même variable* x, *continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.*

En vertu de ce théorème, la somme de la série (2) devra rester fonction continue de la variable x, entre les limites $x=-1$, $x=1$; ce qu'on peut vérifier à l'inspection de la valeur de s donnée par l'équation

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

---

§. 2.e *Des Séries dont tous les termes sont positifs.*

Lorsque la série

(1) $$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots\ldots u_n,\ \&c.\ldots$$

a tous ses termes positifs, on peut ordinairement décider si elle est convergente ou divergente, à l'aide du théorème suivant.

1.er THÉORÈME. *Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croît indéfiniment, l'expression $(u_n)^{\frac{1}{n}}$; et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série (1) sera convergente, si l'on a $k<1$, et divergente, si l'on a $k>1$.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord $k<1$, et choisissons à volonté entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

$$k < U < 1.$$

n venant à croître au-delà de toute limite assignable, les plus grandes valeurs de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ ne pourront s'approcher indéfiniment de la limite k, sans finir par être constamment inférieures à U. Par suite, il sera possible d'attribuer au nombre entier n une valeur assez considérable, pour que, n obtenant cette même valeur ou une valeur plus grande encore, on ait constamment

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} < U, \quad u_n < U^n.$$

Il en résulte que les termes de la série

$$u_0,\ u_1,\ u_2 \ldots u_{n+1},\ u_{n+2},\ \&c.\ldots$$

finiront par être toujours inférieurs aux termes correspondans de la progression géométrique

$$1,\ U,\ U^2,\ \ldots U^n,\ U^{n+1},\ U^{n+2},\ \&c.\ldots;$$

et, comme cette progression est convergente (à cause de $U<1$), on peut de la remarque précédente conclure *à fortiori* la convergence de la série (1).

Supposons, en second lieu, $k>1$; et plaçons encore entre les deux nombres 1 et k un troisième nombre U, en sorte qu'on ait

$$k > U > 1.$$

Si n vient à croître au-delà de toute limite, les plus grandes valeurs de $(u_n)^{\frac{1}{n}}$, en s'approchant indéfiniment de k, finiront par devenir supérieures à U

On pourra donc satisfaire à la condition

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} > U,$$

ou, ce qui revient au même, à la suivante

$$u_n > U^n,$$

par des valeurs de n aussi considérables que l'on voudra ; et par suite, on trouvera dans la série

$$u_0, \; u_1, \; u_2, \; \ldots \; u_n, \; u_{n+1}, \; u_{n+2}, \; \&c. \ldots$$

un nombre indéfini de termes supérieurs aux termes correspondans de la progression géométrique

$$1, \; U, \; U^2, \; \ldots \; U^n, \; U^{n+1}, \; U^{n+2}, \; \&c. \ldots$$

Comme cette progression est divergente (à cause de $U > 1$), et qu'en conséquence ses différens termes croissent à l'infini, la remarque que l'on vient de faire suffira pour établir la divergence de la série (1).

Dans un grand nombre de circonstances, on peut déterminer la valeur de la quantité k, à l'aide du théorème 4.^{e} [chap. II, §. 3.^{e}]. En effet, en vertu de ce théorème, toutes les fois que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ convergera vers une limite fixe, cette limite sera précisément la valeur de k. On peut donc énoncer la proposition suivante.

2.^{e} THÉORÈME. *Si, pour des valeurs croissantes de n, le rapport*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

converge vers une limite fixe k, la série (1) sera

convergente toutes les fois que l'on aura $k < 1$, et divergente toutes les fois que l'on aura $k > 1$.

Concevons, par exemple, que l'on considère la série

$$1, \; \frac{1}{1}, \; \frac{1}{1.2}, \; \frac{1}{1.2.3}, \; \ldots. \; \frac{1}{1.2.3\ldots n}, \; \&c. \ldots :$$

on trouvera

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n(n+1)} = \frac{1}{n+1}, \quad k = \frac{1}{\infty} = 0,$$

et par conséquent la série sera convergente, ce que l'on savait déjà.

Le premier des deux théorèmes qu'on vient d'établir ne laisse d'incertitude sur la convergence ou la divergence d'une série dont tous les termes sont positifs, que dans le cas particulier où la quantité représentée par k devient égale à l'unité. Dans ce cas particulier, il n'est pas toujours facile de décider la question. Toutefois, nous allons démontrer ici deux nouvelles propositions à l'aide desquelles on peut souvent y parvenir.

3^e. THÉORÈME. *Lorsque dans la série (1) chaque terme est inférieur à celui qui le précède, cette série et la suivante*

$$(2) \qquad u_0, \; 2u_1, \; 4u_3, \; 8u_7, \; 16u_{15}, \; \&c. \ldots$$

sont en même temps convergentes ou divergentes.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord la série (1) convergente, et désignons sa somme par s. On aura

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 = 2u_1,$$
$$4u_3 < 2u_2 + 2u_3,$$
$$8u_7 < 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7,$$
$$\&c. \ldots;$$

et par suite, la somme des termes de la série (2), pris en tel nombre que l'on voudra, sera inférieure à

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + \&c. \ldots = 2s - u_0.$$

Il en résulte que la série (2) sera convergente.

Supposons, en second lieu, la série (1) divergente. La somme de ses termes pris en très-grand nombre finira par surpasser toute limite assignable; et, comme on aura

$$u_0 = u_0,$$
$$2u_1 > u_1 + u_2,$$
$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,$$
$$8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14},$$
$$\&c. \ldots,$$

on devra conclure que la somme des quantités

$$u_0, \quad 2u_1, \quad 4u_3, \quad 8u_7, \quad \&c. \ldots$$

prises en très-grand nombre finit elle-même par devenir supérieure à toute quantité donnée. La série (2) sera donc alors divergente, conformément au théorème énoncé.

COROLLAIRE. Si pour la série (1) on prend la suivante

$$(3) \qquad 1, \quad \frac{1}{2^\mu}, \quad \frac{1}{3^\mu}, \quad \frac{1}{4^\mu}, \quad \&c. \ldots,$$

μ désignant une quantité quelconque, la série (2) deviendra

$$1, \quad 2^{1-\mu}, \quad 4^{1-\mu}, \quad 8^{1-\mu}, \quad \&c. \ldots.$$

Cette dernière est une progression géométrique, convergente lorsqu'on suppose $\mu > 1$, et divergente dans le cas contraire. Par suite, la série (3) sera elle-même convergente, si μ est un nombre supérieur à l'unité; et divergente, si l'on a $\mu = 1$ ou $\mu < 1$. Par exemple, des trois séries

$$(4) \qquad 1, \quad \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{3^2}, \quad \frac{1}{4^2}, \quad \&c. \ldots,$$

$$(5) \qquad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \&c. \ldots,$$

$$(6) \qquad 1, \quad \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}, \quad \&c. \ldots.$$

la première sera convergente, et les deux autres divergentes.

4.e THÉORÈME. *Supposons que l'on désigne par L la caractéristique des logarithmes dans un système quelconque, et que, pour des valeurs croissantes de n, le rapport*

$$\frac{L(u_n)}{L\left(\frac{1}{n}\right)}$$